לוגיקה מסדר ראשון

תחשיב הפסוקים

- תחשיב הפסוקים הוא שפה המשמשת לתאור קשרים בין פסוקים.
- לכל פסוק יש ערך אמת - "אמת" או "שקר"
- דוגמאות לפסוקים:
  - אלון הוא מתרגל.
  - הלוח ירוק.
  - היום יום שבת.
  - חיזבאללה ירה רקטות על חיפה.

פסוקים מורכבים

- ניתן לייצג טענות מורכבות על ידי שימוש בקשרים לוגיים כגון "או", "וגם", "לא", ו"אם -- אז".
- דוגמאות:
  - אם מחר ירד גשם, אז אני אקח מטריה.
  - הקניון פתוח או שהיום יום שבת.
  - הגשתי את תרגיל הבית וגם נשמעה אזעקה.
  - לא התקיימה היום הרצאה.

סימנים פורמאליים

- בלוגיקה פורמאלית, נשתמש בסימנים הבאים לייצג טענות:
  - אותיות לטיניות $(A, B, C, \ldots)$ לציון טענות אטומיות כגון "דני הוא סטודנט".
  - סימני סוגריים לציון סדר הפעולות.
  - קשרים לוגיים: $\neg$ לציון שלילה, $\vee$ לציון "או", $\wedge$ לציון "וגם" ו- $\rightarrow$ לציון "אם-אז".
- דוגמאות:
  - $(A \rightarrow (B \vee C))$
  - $(((\neg B) \vee C) \rightarrow (A \wedge (\neg D)))$
  - $((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$

נוסחאות בנויות היטב

- נוסחא φ תקרא בנויה היטב אם היא מקיימת את אחד התנאים הבאים:
  - $\varphi \in \{A, B, C, \ldots\}$ היא פסוק אטומי.
  - נוסחאות α, β הן בנויות היטב ומתקיים: $\varphi = (\neg\alpha)$, $\varphi = (\alpha \vee \beta)$, $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$, או $\varphi = (\alpha \to \beta)$.

ערך האמת של פסוק

- השמה היא פונקציה המתאימה לכל פסוק אטומי ערך אמת.
- ערך האמת V של פסוק φ תחת השמה v מוגדר באופן רקורסיבי:
  - אם α נוסחא אטומית אזי:
    - $V(\alpha) = v(\alpha)$
  - אם $\alpha = \neg\beta$ אזי $V(\alpha)$ יקבע עפ"י טבלת האמת של $\neg$ עבור $V(\beta)$.
  - אם $\alpha = \beta \vee \gamma$ או $\alpha = \beta \wedge \gamma$ או $\alpha = \beta \to \gamma$ אזי $V(\alpha)$ יקבע עפ"י טבלת האמת של הקשרים $\vee, \wedge, \to$ בהתאמה עבור $V(\beta)$ ו-$V(\gamma)$.

טבלאות האמת

α	$\neg\alpha$
T	**F**
F	**T**

α	β	$\alpha \vee \beta$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

α	β	$\alpha \wedge \beta$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

α	β	$\alpha \to \beta$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

טאוטולוגיות וסתירות

- פסוק φ יקרא טאוטולוגיה אם הוא מקבל ערך אמת **TRUE** תחת כל השמה v.
- פסוק φ יקרא סתירה אם הוא מקבל ערך אמת **FALSE** תחת כל השמה v.
- דוגמאות:

טאוטולוגיות	סתירות
$A \to A$	$(A \wedge (\neg A))$
$(A \wedge B) \to (A \vee B)$	$(A \wedge B) \wedge (\neg B)$
$(A \vee (\neg A))$	$\neg(A \vee (\neg A))$
$A \to (A \vee B)$	

גרירה טאוטולוגית

- פסוק α גורר טאוטולוגית פסוק β(סימון $\alpha \models \beta$) אם מתקיים שהפסוק $(\alpha \to \beta)$ הוא טאוטולוגיה.
- קבוצת פסוקים $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ גוררת טאוטולוגית פסוק α (סימון $\Phi \models \alpha$) אם מתקיים שהפסוק

$$((\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \cdots (\varphi_{n-1} \wedge \varphi_n) \cdots)) \to \alpha)$$

הוא טאוטולוגיה.

מערכת פעולות שלמה

- פסוקים α ו- βיקראו שקולים (סימון $\alpha \Leftrightarrow \beta$) אם הפסוק $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ הוא טאוטולוגיה.
- נשים לב שלכל פסוק קיים פסוק שקול לו, המכיל את הקשרים $\to$ו- $\neg$ בלבד, לפי השקילויות הבאות:
  - $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\neg\alpha) \to \beta$.
  - $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \neg(\alpha \to (\neg\beta))$.

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

- בשלב זה נרצה לבנות מערכת אשר תאפשר שנו להוכיח טענות נכונות בתחשיב הפסוקים בצורה מכאנית על ידי פעלות עיבוד מחרוזות פשוטות על הפסוקים.
- מערכת זו מבוססת על אקסיומות (טענות שאנו מקבלים כנכונות), ועל כלל היסק המאפשר ליצור טענות נכונות חדשות מתוך האקסיומות.
- באמצעות מערכת ההוכחה נוכל למצוא טאוטולוגיות, ולבחון האם טענות מסויימות בהנתן ידע על העולם

האקסיומות הלוגיות וכלל ניתוק הרישא

קבוצת האקסיומות הלוגיות בתחשיב הפסוקים היא קבוצת הפסוקים הבאה:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$

האקסיומות הנ"ל הינן סכימות של פסוקים. ניתן להציב כל נוסחא במקום α, β, γ לעיל כדי לקבל נוסחת אקסיומה ספציפית.

כלל ההיסק בתחשיב הפסוקים הוא כלל ניתוק הרישא (Modus Ponens):

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$

משמעות הכלל היא שמ- α ו- $\alpha \to \beta$ נסיק β.

הוכחה

- תהי Φ קבוצת פסוקים ויהי α פסוק. הוכחה של α מתוך Φ היא סדרה סופית ולא ריקה

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$

של פסוקים המקיימת את שני התנאים הבאים:
  - לכל $k = 1, \ldots, n$:
    * ψ_k אקסיומה לוגית; או
    * ψ_k נוסחא ב- Φ; או
    * קיימים $i, j < k$ כך ש- $\psi_i = \psi_j \to \psi_k$.
  - $\psi_n = \alpha$

משפטי הנאותות והשלמות

- אם קיימת הוכחה של α מתוך Φ, נאמר כי α יכיח מתוך Φ ונסמן $\Phi \vdash \alpha$.
- קיים קשר לא-טריביאלי בין יכיחות לבין גרירה טאוטולוגית:
  - משפט הנאותות: אם $\Phi \vdash \alpha$ אזי גם $\Phi \models \alpha$. כלומר, כל מה שאפשר להוכיח הוא נכון.
  - משפט השלמות: אם $\Phi \models \alpha$ אזי גם $\Phi \vdash \alpha$. כלומר, כל מה שנכון אפשר להוכיח.
- המשפטים הנ"ל מספקים קשר בין סינטקס לסמנטקיה ומהווים את ההצדקה לשימוש בהוכחה ככלי לקביעת נכונות טענות.

תחשיב הפרדיקטים

- תחשיב הפרדיקטים היא שפה לייצוג טיעונים מורכבים על תכונות של עצמים בעולם.
- לטיעונים בתחשיב הפרדיקטים יש שני מרכיבים: עצמים ותכונות שמייחסים להם. התכונות נקראות פרדיקטים (יחסים).
- לדוגמא:
  - כל הלימונים צהובים.
  - אורי סטודנט.

תחשיב הפרדיקטים (תחביר)

השפה מכילה:

1. סימני קבועים $c_1, c_2, c_3, \ldots$
2. סימני משתנים $x_1, x_2, x_3, \ldots$
3. לכל n טבעי קבוצה של סימני פונקציות n-מקומיות: $f_1^n, f_2^n, f_3^n, \ldots$
4. לכל n טבעי חיובי קבוצה של סימני פרדיקטים n-מקומיים: $p_1^n, p_2^n, p_3^n, \ldots$
5. קשרים לוגיים: $\vee, \wedge, \to, \neg$.
6. כמתים: $\forall, \exists$

תחשיב הפרדיקטים (תחביר) - המשך

נגדיר את אוסף שמות העצם (ביטויים) בשפה:

- קבועים.
- משתנים.
- אם $t_1, t_2, \ldots, t_n$ שמות עצם ו- f_k^n סימן פונקציה n מקומית, אזי $f_k^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ הינו שם עצם.

נגדיר את אוסף הנוסחאות:

- אם $t_1, t_2, \ldots, t_n$ הם שמות עצם, ו- p_k^n הוא סימן פרדיקט n מקומי, אזי $p_k^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ נוסחא.
  נוסחא כנ"ל נקראת פסוק אטומי.
- תהי α נוסחא, אזי $\neg\alpha$ נוסחא.
- יהיו α, β נוסחאות, אזי $\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \to \beta$ נוסחאות.
- תהי α נוסחא ויהי x משתנה, אזי $\exists x : \alpha, \forall x : \alpha$ נוסחאות.

הצבה

הגדרות:

- משתנה קשור (bound) - משתנה המופיע בנוסחא עם כמת.
  דוגמא: $\forall x : Apple(x) \to Red(x)$.
- משתנה חופשי (free) - משתנה שאינו קשור.
  דוגמא: $Apple(x) \to Red(x)$.
- נוסחא תקרא פסוק אם לא מופיעים בה משתנים חופשיים.
- יהיו s ו-t שמות עצם, יהי x משתנה, נגדיר את $s(x|t)$ כשם העצם המתקבל מ-s כאשר כל מופע של המשתנה x מוחלף ב- t.
- תהי α נוסחא ו-t שם עצם, יהי x משתנה, נגדיר את $\alpha(x|t)$ כנוסחא המתקבלת מ-α כאשר כל מופע חופשי של המשתנה x מוחלף בשם העצם t.

האקסיומות הלוגיות

קבוצת האקסיומות הלוגיות של תחשיב הפרדיקטים היא:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$
4. $(\forall x : (\alpha \to \beta)) \to (\forall x : \alpha \to \forall x : \beta)$
5. $\alpha \to \forall x : \alpha$ (כאשר x אינו חופשי ב- α)
6. $\forall x : \alpha \to \alpha(x|t)$ (כאשר t הינו שם עצם ללא משתנים חופשיים שהופכים להיות קשורים כאשר מציבים אותו במקום x)

האקסיומות הנ"ל הינן סכימות של נוסחאות. ניתן להציב כל נוסחא במקום α, β, γ לעיל כדי לקבל נוסחת אקסיומה ספציפית.

סמנטיקה

- תהי U קבוצת עצמים (עולם).
- פירוש I הוא פונקציה הממפה איברים של השפה לאיברים של הייצוג באופן הבא:
  1. הקבועים ממופים לאובייקטים בעולם.
  2. הפונקציות ממופות לפונקציות המתאימות בין n-יות של איברים בעולם לאיברים בעולם.
  3. הפרדיקטים ממופים ליחסים בעולם.
- השמה לכל המשתנים היא מיפוי של המשתנים החופשיים לאיברים ב-U.

ערך האמת של נוסחאות

- פונקצית הערכה של נוסחאות ממפה נוסחא ל-TRUE או FALSE:
- ערך האמת V של נוסחא α תחת פירוש I מוגדר באופן רקורסיבי:
  - אם $\alpha = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ נוסחא אטומית אזי:
    - * אם $I(P)\langle I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n)\rangle$, אזי $V(\alpha) = \textbf{TRUE}$.
- אחרת, $V(\alpha) = \textbf{FALSE}$.
- אם $\alpha = \neg\beta$ אזי $V(\alpha)$ יקבע עפ"י טבלת האמת של $\neg$ עבור $V(\beta)$.
- אם $\alpha = \beta \vee \gamma$ או $\alpha = \beta \wedge \gamma$ או $\alpha = \beta \to \gamma$ אזי $V(\alpha)$ יקבע עפ"י טבלת האמת של הקשרים $\vee, \wedge, \to$ בהתאמה עבור $V(\beta)$ ו- $V(\gamma)$.
- אם $\alpha = \forall x : \beta$ אזי:
  - אם לכל השמה של איבר מ-U ב-x נקבל $V(\beta) = \textbf{TRUE}$, אז $V(\alpha) = \textbf{TRUE}$.
  - אחרת, $V(\alpha) = \textbf{FALSE}$.
- הערה: $\exists x : \beta$ שקול ל: $\neg\forall x : \neg\beta$.

ספיקות

- פירוש I (interpretation) והשמה V מספקים נוסחא אם"ם הנוסחא מקבלת ערך TRUE תחת הפירוש וההשמה.
- קבוצת פסוקים Φ גוררת לוגית פסוק α אם"ם כל פירוש והשמה שמספקים את Φ מספקים גם את α. נסמן: $\Phi \models \alpha$.
- משפטי הנאותות והשלמות: נוסחא נובעת לוגית מקבוצת נוסחאות אם"ם היא יכיחה מתוכן:

$$\Phi \vdash \alpha \Leftrightarrow \Phi \models \alpha$$

- משפטי הנאותות והשלמות מקשרים בין סינטקס לסמנטיקה ומשמשים כלי לבדיקת גרירה לוגית.

ייצוג ידע (Knowledge Representation)

- ייצוג עצמים:

Table (my_desk)

Car (my_suzuki)

- ייצוג תכונות של עצמים:

Num_of_legs(my_desk,4)

Color (my_suzuki, silver)

- ייצוג תכונות כלליות של עצמים:

$\forall x : [\text{Table}(x) \to \text{Num\_ of\_ legs}(x, 4)]$

- ייצוג יחסים בין עצמים:

Parent (avraham, izak)

On (coffee_glass, my_desk)

ייצוג ידע - המשך

- ייצוג יחסים כלליים:
  הגדרת יחס Above לפי קואורדינאטת גובה של עצמים:

$$\forall x \forall y [\text{Greater}(\text{z\_ coord}(x), \text{z\_ coord}(y)) \to \text{Above}(x, y)]$$

- ייצוג תכונות של יחסים:
  טרנזיטיביות של יחס Above:

$$\forall x \forall y \forall z [\text{Above}(x, y) \wedge \text{Above}(y, z) \to \text{Above}(x, z)]$$

- ייצוג היררכיות:

$\forall x : [\text{Work\_ Table}(x) \to \text{Table}(x)]$

$\forall x : [\text{Table}(x) \to \text{Num\_ of\_ legs}(x, 4)]$

Work_ Table(my_ desk)

ייצוג ידע - דוגמא

המירו את המשפטים הבאים לייצוג לוגי:

- Jack owns a dog.
- Every dog owner is an animal lover.
- No animal lover kills an animal.
- Either Jack or Curiosity killed the cat, who is named Tuna.
- Did Curiosity kill the cat?

פרוצדורת הוכחה

- פרוצדורה שבהינתן משפט (נוסחא יכיחה) תמצא לו הוכחה.
- אם נוסחא אינה משפט אזי לא מובטח לנו שפרוצדורה כזו תעצור!

הפרוצדורה:

1. $S \leftarrow \emptyset$.
2. הוסף אקסיומה ל- S לפי מניה כלשהי של האקסיומות.
3. הפעל את כללי ההיסק על נוסחאות ב-S.
4. הוסף את הנוסחאות החדשות ל-S.
5. אם הנוסחא המבוקשת נמצאת ב-S, החזר "כן".
6. אחרת, חזור ל-2.