Competitive Safety Analysis (אנליזת בטיחות תחרותית)

- אסטרטגיה $e \in S_i$ תהיה **דומיננטית (dominates)** על אסטרטגיה $f \in S_i$ אם לכל $\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \in \prod_{j \neq i} \Delta\left(S_j\right)$ [*] נקבל $U_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, e, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \geq U_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, f, s_{i+1}, \ldots, s_n\right)$ ואי-שוויון ממש עבור קבוצה אחת של אסטרטגיות $\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \in \prod_{j \neq i} \Delta\left(S_j\right)$ וזוג $e, f \in S_i$ אחד לפחות. ◆

כלומר, אם אסטרטגיה $e \in S_i$ דומיננטית על אסטרטגיה $f \in S_i$ אזי שחקן (רציונלי) i תמיד יעדיף לבחור את $e \in S_i$ על $f \in S_i$. לדוגמא:

כאן, לשחקן I (שורות) אסטרטגיה a_2 דומיננטית על אסטרטגיה a_1.

שחקן II

שחקן I	b_1	b_2	b_3
a_1	1,2	2,6	5,1
a_2	3,5	6,1	5,8
a_3	2,7	3,3	1,5

- משחק יקרא **בלתי ניתן לצמצום (non-reducible)** אם לא קיימות אסטרטגיות $f, e \in S_i$ לאותו שחקן $i \in n$ כך ש e תהיה דומיננטית על f עבור כל i. ◆

כלומר, אם נרצה לחשב מה האסטרטגיה המעורבת עבור שחקן, כל ההסתברויות שנקבל יהיו גדולות ממש מאפס.

- משחק יקרא **גנרי (generic)** אם לכל זוג אסטרטגיות $f, e \in S_i$ ו- $\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \in \prod_{j \neq i} \Delta\left(S_j\right)$ נקבל $U_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, e, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) = U_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, f, s_{i+1}, \ldots, s_n\right)$ אם ורק אם $f = e$. ◆

כלומר, באופן אינטואיטיבי, שתי בחירות שונות של שחקן לא יביאו לאותה תועלת לא חשוב מה בחרו יתר השחקנים. (בהינתן הבחירות של יתר השחקנים)

- **טענה** תהי G משחק 2x2, בלתי ניתן לצמצום וגנרי, ונניח כי רמת הביטחון האופטימאלית של שחקן $i \in n$ ניתנת להשגה על-ידי אסטרטגיות מעורבות ממש אזי רמת הביטחון האופטימאלית שווה ממש לתשלום הצפוי (expected payoff) של אותו שחקן בשיווי משקל Nash של G.

נתבונן בדוגמא הבאה:

שחקן II

שחקן I		b_1	b_2
α	a_1	100 , 100	40 , 210
$1-\alpha$	a_2	60 , 200	50 , 90

---

[*] כל וריאציה אפשרית לאסטרטגיות של ייתר השחקנים.

במשחק זה אין שיווי משקל טהור (כלומר, בהינתן הבחירות של כל השחקנים, קיים שחקן שיהיה כדי לו לשנות את בחירתו). ננסה למצוא שיווי משקל מעורב. נסמן ב- α את ההסתברות של שחקן I לבחור את a_1 וב- β את ההסתברות של שחקן II לבחור את b_1. נבדוק מתי שחקן I ושחקן II יהיו אדישים בין שתי הבחירות, בהתאמה:

$$\alpha \cdot 100 + (1-\alpha) \cdot 200 = \alpha \cdot 210 + (1-\alpha) \cdot 90 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(1-\alpha = \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta \cdot 100 + (1-\beta) \cdot 40 = \beta \cdot 60 + (1-\beta) \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{5} \left(1-\beta = \frac{4}{5}\right)$$

כאן מקבלים כי הרווח של השחקן הראשון יהיה **52**.

עכשיו נמצא את אסטרטגיית רמת הבטחון (Safety level):

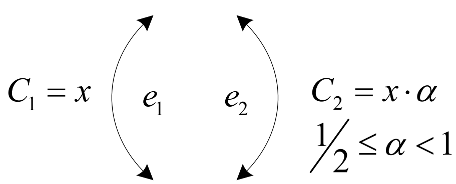
$$\alpha \cdot 100 + (1-\alpha) \cdot 60 = \alpha \cdot 40 + (1-\alpha) \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{5}$$

תוצאה שלילית כאן פירושה שאף פעם לא כדי לבחור את האסטרטגיה a_1. כלומר, אם שחקן ראשון בוחר ב- a_2 הוא מבטיח לעצמו רווח של לפחות **50**, בכל משחק.

כאן ראינו כי שתי שיווי משקל Nash ואסטרטגיית Safety level נותנים רווח שונה. נרצה להקטין את היחס בין אסטרטגיות – כמו בדוגמא זו.

➢ **Theorem 3.1:** There exists a $9/8$ competitive safety strategy for the extended decentralized load balancing setting.

משפט 3.1: קיימת אסטרטגיית $9/8$ בטחון מתחרה (competitive safety strategy) לכוונן ויסות עומס מורחב ומבוזר. ◆



נתבונן בדוגמא הבאה: נתונים שני קווי תקשורת e_1 ו- e_2 בעלי כיבול $C_1 = x$ ו- $C_2 = x \cdot \alpha$ בהתאמה, כאשר $1/2 \le \alpha < 1$.

ישנם n שחקנים כאשר כל אחד מהם יכול לבחור באיזה קו תקשורת להשתמש. נתון כי k שחקנים בוחרים להשתמש בקו e_1, m שחקנים בוחרים להשתמש בקו e_2, כאשר $k+m=n$. כלומר כל שחקן שבחר את הקו e_1 יקבל רוחב פס של $\frac{x}{k}$ וכל שחקן שבחר את הקו e_2 יקבל רוחב פס של $\frac{x \cdot \alpha}{m}$.

נניח, בלי הגבלת הכלליות (בהה"כ), כי $i=1$ (מתבוננים בשחקן הראשון). נניח כי השחקנים $\left\{1,2,\ldots,\left\lceil \frac{1 \cdot n}{1+\alpha} \right\rceil\right\}$ בחרו בקו e_1 ויתר השחקנים בחרו בקו e_2 אזי התשלום (הרווח) של i חסום ע"י $\frac{x(1+\alpha)}{n}$[†]. (נסמן ב- ✡✡)

[†] למעשה זו גם ההסתברות לבחור את הקו המהיר.

עכשיו, נניח כי השחקן הבא בחר בקו e_1 בהסתברות[‡] $\frac{\alpha}{1+\alpha}$. (*עכשיו נרצה לחשב את הרווח של בחירה זו ע"י חלוקה ב-* $\beta(n-1)$ *. כאן מתבוננים בכל יתר השחקים* $n-1$ *כאשר* $0 \le \beta \le 1$.)

נניח כי ישנם n משתתפים ו- $\beta(n-1)$ מתוך $n-1$ משתתפים בחרו בהקו e_2. אזי, הרווח הצפוי של השחקן i:

$$\underbrace{\frac{1}{1+\alpha}}_{I}\cdot\underbrace{\frac{\alpha x}{\beta(n-1)+1}}_{II}+\underbrace{\frac{\alpha}{1+\alpha}}_{III}\cdot\underbrace{\frac{x}{(1-\beta)(n-1)+1}}_{IV}\ge\frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{\alpha x}{\beta n+1}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{x}{(1-\beta)n+1}=$$

(נסמן ב- ✡✡✡)

$$\frac{\alpha x}{1+\alpha}+\frac{n+2}{(1+\beta n)(n-\beta n+1)}$$

I) הסיכוי לבחור בקו e_2. II) כמה שחקנים בחרו בקו e_2 (כולל השחקן ה- i).
II) הסיכוי לבחור בקו e_1. IV) כמה שחקנים בחרו בקו e_1 (כולל השחקן ה- i).

ב- ✡✡✡ קיבלנו את מה ששחקן יכול להבטיח לעצמו באסטרטגיה זו.

נמצא את היחס בין ✡✡ לבין ✡✡✡:

$$\frac{✡✡}{✡✡✡} = \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\cdot\frac{(\beta-\beta^2)n^2+n+1}{n(n+2)}$$

כאשר $n\to\infty$ נקבל: $\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\cdot(\beta-\beta^2)$. עכשיו ניקח ערכי $0.5\le\alpha<1$ ו- $0\le\beta<1$ נקבל יחס של $\frac{9}{8}$.
כלומר מקבלים בערך כ- 90% מהאופטימום (שיווי משקל Nash).
לסיכום, זהו אלגוריתם הסתברותי אשר בתצורת העבודה (settings) שלנו מבטיח לסוכן i רווח של כ 90% מהאופטימום.

אם מתבוננים מנקודת מבטו של סוכן, בהתבוננות של Nash ישנה בעיה (הנחת הרציונליות). כנראה אפשר להבטיח רווח טוב יותר. לדוגמא: משחק "דילמת האסיר" – שבו הנחת הרציונליות לא מביא את הרווח המקסימלי לשחקנים אלה ל- (2,2) (שקף 10). דוגמא נוספת "Centipede game" (שקף 20). הנחת הרציונליות כאן מביא רווח מינימלי לשני השחקנים. לסיכום, אילו הנחת הרציונליות לא הייתה קיימת כל השחקנים היו מרוויחים יותר במשחקים אלה.

מוטיבציה: *עכשיו נרצה לעבור למודל (עולם) בו ישנו מתכנן ותפקידו (או היכולת שלו) היא להציע לסוכנים איזה בחירה לבצע. למעשה, גם בתצורת עבודה זו לא ברור האם, למשל, סוכן מסוים יבחר לעשות, בסופו של דבר, את מה שהמתכנן הציע או לא? סוגיה זו מביאה את הדיון למשחקים מורכבים. אבל, יש בעיה להציג משחק מורכב לפי המודלים שראינו עד כה.*

<u>תאור של סיטואציות</u>

באופן כללי, נגדיר סביבת עבודה המכילה "מנהל" (designer). הרעיון כאן הוא שכל סוכן צריך לעשות את מה שהדזיינר אומר לו. בסביבת עבודה זאת ישנן מספר רמות של שליטה על הסוכנים:

1. *שליטה מלאה – כלומר כל פעולה אשר סוכן מבצע היא המלצתו של הדזיינר וסוכן לא מבצע פעולה אם היא לא המלצתו של הדזיינר.*
2. *קונבנציות לכל מצב בחיים – למידה.*
3. *אי וודאות – בתצורה זו חלק מהסוכנים מחוץ לשליטת הדזיינר.*

‡ חשוב לזכור כי כאן לא מדובר בחלק מ- Nash equilibrium.

מודל מערכת רבת משתתפים (Multi Entity Model)

מודל של מערכת רבת משתתפים הוא קבוצת משתנים $\langle E_1, E_2, \ldots, E_n, \mathcal{A}, T \rangle$ כאשר:
E_i - סוכן i. $\mathcal{A}$ - קבוצת פעולות. T - פונקצית העברת מצבים.

באופן יותר פורמאלי, E_i מוגדר כ:

כמכונת מצבים סופית ואי-דטרמיניסטית $(L_i, \mathcal{A}_i)$. כאשר L_i - קבוצה של מצבים מקומיים. $\mathcal{A}_i$ מוגדרת כ- $\mathcal{A}_i : L_i \to 2^{\mathcal{A}}$. כלומר $\mathcal{A}_i$ היא קבוצה המכילה כל פעולה אפשרית עבור כל מצב מקומי ומוגדרת כפונקציה של המצב.

- **קונפיגורציה (configuration)** של מערכת היא קבוצה $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ כאשר n זהו מספר הסוכנים במערכת ו- s_i הוא מצבו של הסוכן ה- i.

נגדיר:
C – קבוצת כל הקונפיגורציות של המערכת.
Λ – פעולה ריקה.
סוכן פסיבי (passive agent) – סוכן אשר יכול לבצע רק את הפעולה Λ.

- קבוצת פעולות $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ אשר יכולה להתבצע (להיות מופעלת) ע"י הסוכנים בנקודה מסוימת מכונה **joint action**. נגדיר פונקצית מעבר: $T : C \times \mathcal{A}^n \to C$. כאשר $\mathcal{A}^n$ מסמנת את קבוצת כל ה- joint actions האפשריות של כל סוכן במערכת.

במערכות אמיתיות, בדרך כלל, ההשפעות של פעולות של סוכנים מושפעים ממספר יחסית מצומצם של פעולות של סוכנים אחרים. אינטואיטיבית, עבור כל סוכן, נרצה לקשר רק בין אוספים קטנים של פעולות של סוכן לאוספים קטנים של פעולות של סוכנים אחרים.

- נגדיר כי כל סוכן מורכב מאוסף של רכיבים (components), כאשר כל רכיב הוא מכונת מצבים: $\left(M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_{f(i)}}\right)$.

בנוסף, נגדיר כי מצבו של הסוכן ה- i (s_i) מורכב מאוסף מהמצבים של כל רכיב. נסמן ב- L_{i_j} את מרחב המצבים של M_{i_j} בהתאמה: $L_{i_j} = \left(l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_{f(i)}}\right)$. בנוסף לכך, כאן צריך לדרוש כי L_{i_j} יהיו זרים בזוגות. כלומר עבור כל סוכן i , כל רכיב M_{i_j} מתקיים $l_{i_m} \cap l_{i_k} = \varnothing$ כאשר $l_{i_m}, l_{i_k} \in L_{i_j}$.

- הדבר הנ"ל מאפשר לנו להגדיר הצגה יעילה של פונקצית המעברים T. נחליף את T באוסף של T_{i_j}-ים.

נגדיר את T_{i_j}: $T_{i_j} : L_{i_j} \times \mathcal{A}^n \times \mathcal{L} \to C$. כאשר $\mathcal{L}$ זהו אוסף של תנאים על המעברים בין מצבי המערכת *(בעצם $\mathcal{L}$ היא סוג של לוגיקה).*

באופן פורמלי, $\mathcal{L}$ היא שפת לוגיקה פרופוזיציונית (Propositional logic) הסגורה תחת האופרטורים הבוליאניים $\neg, \to$. כל אלמנט פרימיטיבי בשפה הוא נוסחא בנויה היטב (ההגדרה נלקחה משקף 5, תרגול 1 - "לוגיקה מסדר ראשון") לכל מצב s אשר מקיים $s \in L_{i_j}$ עבור M_{i_j} כלשהי.

נוסחא φ תקרא בנויה היטב אם φ מקיימת:

- $\varphi \in \{A, B, C, \ldots\}$ היא פסוק אטומי.
- נוסחאות α, β הן בנויות היטב ומתקיים: $\varphi = (\neg\alpha),\ \varphi = (\alpha \rightarrow \beta)$. (מכיוון שאפשר להציג את האופרטורים $\wedge, \vee$ בעזרת $\rightarrow, \neg$ - אנחנו יכולים להסתפק בהגדרה זו).

כמו כן, נגדיר גם פונקצית (מעבר) ברירת מחדל : $T_{i_j}(s, \bar{a}, \psi) = s$ עבור כל מצב s וכל תנאי ψ.

הצגה מקובלת: המעבר ממצב מסוים s_x למצב מסוים s_y של מכונת מצבים M_{i_j} כלשהי תחת פעולה משולבת כלשהי, יתבצע בתנאי מסוים ב- $\mathcal{L}$.

➢ בדרך כלל מוסיפים גם הצגה יעילה ל- $\mathcal{A}_L$-ים : $\mathcal{A}_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}_i$. כלומר לכל פעולה מוסיפים תנאי להפעלתה כאשר $\mathcal{L}_i$ היא $\mathcal{L}$ המוגבלת למצבי הסוכן ה- i.

אם קיימת פעולה שאינה משפיעה – לא מסמנים את אותה הפעולה. כלומר, $s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ מסמן רק פעולות שמשפיעות על המצב (פעולות לא ריקות).

➢ **תוכנית** (אסטרטגיה) לסוכן היא פונקציה מתוך היסטוריית התצפיות (observations) שהסוכן ראה (המצבים בהם ביקר הסוכן) לפעולה הבאה של הסוכן.

כעת יש לנו מודל רב ישויות, כאשר לכל סוכן יש יעדים משלו ואנחנו מחפשים לתת לכל סוכן תוכנית, כך שכל הסוכנים יגיעו ליעד, בשלב מסוים או באותו שלב – ללא קשר לקונפיגורציה ההתחלתית, כל עוד הקונפיגורציה מתוך אוסף כל קונפיגורציות התחלתיות חוקיות C_0.

הגענו למודל המסוגל לתאר מצבי חוסר וודאות (לא ידוע, באופן חד משמעי, מראש באיזה מצב התחלתי נמצא הסוכן).

מוטיבציה:
האם ניתן להבטיח פתרון (Cooperative goal achievement) ?
האם ניתן לתת לסוכנים תוכניות באורך סופי אשר יבטיחו פתרון? (כלומר, האם הבעיה קריאה?)
האם יש דרך, סופית, להשיג את היעדים?

- *אם התוכנית היא עץ החלטה אזי יש פיצול בעץ רק כאשר יש שוני בקונפיגורציה התחלתית.*
- *אם לא היו פיצולים בעץ בין* n_1 לבין n_2 אזי אפשרי לצמצם את העץ.