# The Golden Mean Problem

הרעיון והבעיה:
יש לסוכן $I$ הרבה דרכים להשיג יעד מסויים. אבל סוכן $II$ יכל להפריע לו. בפרט צריך לצמצם את הפעולות של סוכן $II$ . אבל בשל סימטריה יש לצמצם גם עבור סוכן $I$ . ואז אולי סוכן $I$ לא יוכל להשיג יעדים אחרים.

נניח $n=|s|$ ו $n=2$ יעדים $g_{1,..},g_k$ ופונקציות התשלום הן סימטריות, כלומר
$\forall s,t \quad u_1(s,t)=u_2(t,s)$ (לכן נבדוק רק תשלומים עבור סוכן $I$ ) . כעת פו' התשלום המתאימה ליעד $g_l$ תתאים לכל $(S_i,S_j)\in S\times S$ מספר בין [0,1] המתאים לתשלום שחקן $I$ . כאשר שחקן $I$ ישחק $s_i$ ושחקן $II$ ישחק $s_j$ .

ניתן להתאים לכל $g_l$ מטריצה מתאימה $M_l$
בהינתן תת-קבוצה T של המספרים בין 1 ל m נגדיר את $M_l^T$ להיות התת מטריצה של $M_l$ על ידי מחיקת שורות ועמודות ב $M_l$ .
בעיית golden mean הופכת מציאת T כך שכל $M_l^T$ מכיל שורה שכולה לפחות $\epsilon$ .

נראה שהבעיה של מציאת golden mean היא NP – Complete

כדי להוכיח שהיא גם NP קשה, מספיק להראות בעייה אחרת שהיא NP קשה שיש רדוקציה יעילה ממנה לבעיה שלנו. אנחנו נראה רדוקציה מבעיית SAT.
ניקח $\epsilon=1$ , אוסף המטריצות נתון. לכל פסוק צריך להתאים יעד/מטריצה. השורה ה i והעמודה ה i במטריצה זו יתאימו למשתנה $(i=1..n)$ $x_i$ ול $\neg x_i$ כל כניסה מהצורה $(i,i+n)$ וכל כניסה מהצורה $(i+n,i)$

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & \dots & x_n & \neg x_1 & \dots & \neg x_n \\
x_1 & \dots & & & & & \\
. & \dots & & & & & \\
x_n & \dots & & & & & \\
\neg x_1 & \dots & & & & & \\
. & \dots & & & & & \\
\neg x_n & \dots & & & & &
\end{array}$$

איברים מהצורה $(x_i,\neg x_i)$ יהיו שווים ל 0. בשורה מסויימת במטריצה יהיה 1 בכל מקום (פרט לאילו שנקבעו כבר ל 0) אם הליטרל המתאים מופיע בפסוק ו 0 אחרת.
כעת אם יש golden mean נסתכל עבור כל יעד באסטרטגיה שמבטיחה השגתו ונצבור אסטרטגיות אלו. אסטרטגיות אלו יתאימו לליטרלים אליהם נשים ערך 1 ולשלילותם 0. לכל השאר נשים ערך אקראי כלשהו. אם יש השמה מספקת אזי נזרוק שורות ועמודות שמתאימות להשמה של שקר ונקבל שאסטרטגיות מתאימות שנשארו יבטיחו golden mean.

## Game Model

Definitions:
A social law is a restriction on the set of actions evaluated to the agents.
A game g and a social law $s_l$ induces a subgame $g_{sl}$ of g that is a restriction of g to actions that are not prohibited by $s_l$ .
Let g be a game, v a game variable, and l an ordinary possible values of v. A social law $s_l$ is rational with respect to g and v if v(g) < v( $g_{sl}$ )

קונונציה חברתית היא חוק חברתי המקביל רק לפעולה אחת.

<u>Definition:</u>
A n-k-g iterative game consists of a set of n agents and a given k person game g. The game is played repetitively an unbounded number of times. At each iteration, a random k-tuple of agents play an instance of the game, where the members of this k-tuple are selected with uniform distribution from the set of agents

<u>Action selection function:</u>
A function from an agents history to an action in g which is both oblivious and local.

HCR (Highest-Cumulative Reward):
An agent switches to a new action iff the total payoff obtained from this action is the highest and higher than his total payoff from the current action

| | ***a*** | ***b*** |
|---|---|---|
| a | 1,1 | -1,-1 |
| b | -1,-1 | 1,1 |

מתחילים כאשר הסכום המצאבר הוא 0 עבור שתי הפעולות. ונשארים באסטרטגיה a כל עוד הסכום של אסטרטגיה זו גדול מסכום של אסטרטגיה b (במשחק שבו אי אפשר לקבל ערך שלילי תמיד נשאר באותה אסטרטגיה).

<u>Theorem:</u>
Let $n \geq 4$ given an n-2-g iterative game were g is a social agreement game placing no constraints on the initial choices then HCR leads to rational convention with respect to maximin for any social agreement game g. If HCR is applied with bounded memory, the memory can be selected so that the speed of convergence will be asymptotically optimal.